



Verifica di Matematica

MODULO 3 - Calcolo letterale: fattorizzazione polinomiale

COGNOME e Nome:

Classe: **3 QA**

Data:

Tempo a disposizione: 110 minuti

prof.: *Diego Fantinelli*

voto finale:

★ eventuali osservazioni e/o considerazioni del docente:

.....
.....

Istruzioni e avvertenze:

- La presente verifica, somministrata in modalità *in presenza*, è suddivisa in due parti:
 - ▶ la prima parte consiste in un test con 10 domande a risposta multipla, del valore di 2 punti ciascuna;
 - ▶ la seconda parte contiene 6 quesiti,
- per un totale di 64 punti, più un quesito *facoltativo* del valore di 2 punti bonus, che verrà considerato ove siano già stati risolti tutti i precedenti.
- **La sufficienza è fissata a 33 punti**
- Il voto verrà riportato in capo alla presente verifica, e sarà oggetto di un confronto costruttivo con lo studente.
- Eventuali copiature palesi comporteranno l'annullamento della prova e un voto pari a 3, a prescindere dal punteggio totalizzato.
- È vietato l'utilizzo di calcolatrici scientifiche, smartphone, tablet e altri dispositivi digitali, così come l'accesso a internet, nonché la consultazione di testi, appunti e/o siti web, ove non preventivamente autorizzato.
- In caso di dubbi riguardo l'autenticità della prova l'insegnante si riserva di verificare la preparazione con alcune domande al momento della consegna della verifica.

Valutazione

Tabella dei punteggi

Esercizio	Punti	Punteggio
Test Q1	2	
Test Q2	2	
Test Q3	2	
Test Q4	2	
Test Q5	2	
Test Q6	2	
Test Q7	2	
Test Q8	2	
Test Q9	2	
Test Q10	2	
Es. 1a	2	
Es. 1b	2	
Es. 2a	4	
Es. 2b	4	
Es. 3	4	
Es. 4a	5	
Es. 4b	5	
Es. 5a	6	
Es. 5b	6	
Es. 6	6	
Totale	64	
Bonus	2	

Griglia di valutazione

punteggio	voto
< 9	3
9	3½
14	4
19	4½
25	5
29	5½
33	6
37	6½
42	7
47	7½
51	8
55	8½
59	9
64	9½
64 + bonus	10

La sufficienza è fissata a 33 punti

Conoscenze, abilità e competenze

	conoscenze	abilità	competenze
eccellente	5	3	2
ottimo	4.5	2.75	1.75
buono	4	2.5	1.5
discreto	3.5	2.25	1.25
sufficiente	3	2	1
quasi sufficiente	2.75	1.875	0.875
insufficiente	2.5	1.75	0.75
gravemente insufficiente	2	1.5	0.5
scarso	1.5	1.25	0.25

*Per gli indicatori e i descrittori si fa riferimento a quelli esplicitati nella programmazione.
Ciascun valore espresso nella tabella va inteso come massimo dei punti attribuibili.

Test: fattorizzazione polinomiale

Domanda 1.**[2 punti]**Che cosa si intende per polinomio *irriducibile* su \mathbb{Z} ?

- A Un polinomio di grado 1 con coefficiente direttivo uguale a 1
- B Un polinomio che non può essere scritto come prodotto di due polinomi di grado inferiore con coefficienti interi
- C Un polinomio con un unico termine non nullo
- D Un polinomio il cui valore numerico è sempre positivo

Risposta corretta: B — un polinomio irriducibile su \mathbb{Z} non ammette fattorizzazioni non banali con coefficienti interi.**Domanda 2.****[2 punti]**Quale dei seguenti polinomi possiede un *fattore comune* a tutti i suoi termini?

- A $5x^2 - 3y + 7$
- B $4a^3 - 6a^2 + 8a$
- C $x^2 + x + 1$
- D $3a^2 - 5b + 2ab$

Risposta corretta: B — il MCD dei termini è $2a$: $4a^3 - 6a^2 + 8a = 2a(2a^2 - 3a + 4)$.**Domanda 3.****[2 punti]**Qual è la fattorizzazione *completa* di $6x^3 - 12x^2 + 18x$?

- A $6(x^3 - 2x^2 + 3x)$
- B $6x(x^2 - 2x + 3)$
- C $6x^2(x - 2) + 18x$
- D $3x(2x^2 - 4x + 6)$

Risposta corretta: B — il MCD è $6x$. A non estrae la x ; D non usa il MCD massimo; C non è fattorizzato.**Domanda 4.****[2 punti]**Quale delle seguenti è la formula corretta del *cubo di binomio* $(a + b)^3$?

- A $(a + b)^3 = a^3 + b^3$
- B $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- C $(a + b)^3 = a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3$
- D $(a + b)^3 = a^3 + 3ab + b^3$

Risposta corretta: B — formula del cubo di binomio: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.**Domanda 5.****[2 punti]**Qual è la fattorizzazione corretta di $x^2 - 25$?

- A $(x - 5)^2$
- B $(x - 5)(x + 5)$
- C $(x - 5)(x - 5)$

D $x(x - 25)$

Risposta corretta: B — $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5)$.

Domanda 6.**[2 punti]**Qual è la fattorizzazione corretta di $x^2 - 10x + 25$?

- A $(x - 5)(x + 5)$
 B $(x - 25)(x - 1)$
 C $(x - 5)^2$
 D $(x - 10)(x + 1) - 15$

Risposta corretta: C — $x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 = (x - 5)^2$, trinomio quadrato perfetto.**Domanda 7.****[2 punti]**Per fattorizzare $x^2 - 7x + 10$, si cercano due numeri a e b tali che $a + b = -7$ e $a \cdot b = 10$. Quali sono?

- A $a = 2, b = 5$
 B $a = -2, b = -5$
 C $a = -1, b = -10$
 D $a = 1, b = -10$

Risposta corretta: B — $(-2) + (-5) = -7$ e $(-2) \cdot (-5) = 10$, quindi $x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$.**Domanda 8.****[2 punti]**Quale dei seguenti polinomi è *irriducibile* su \mathbb{Z} ?

- A $x^2 - 9$
 B $x^2 - 7x + 10$
 C $x^2 + 9$
 D $9x^2 - 4$

Risposta corretta: C — $x^2 + 9$ è una somma di quadrati, irriducibile su \mathbb{Z} . Le altre: A = $(x - 3)(x + 3)$, B = $(x - 2)(x - 5)$, D = $(3x - 2)(3x + 2)$.**Domanda 9.****[2 punti]**Qual è la fattorizzazione *completa* di $8x^3 - 4x^2$?

- A $4x^2(2x - 1)$
 B $4x(2x^2 - x)$
 C $2x^2(4x - 2)$
 D $2x(4x^2 - 2x)$

Risposta corretta: A — il MCD è $4x^2$. B non estrae tutto x^2 ; C e D non usano il coefficiente massimo.**Domanda 10.****[2 punti]**Uno studente afferma che $x^2 - 8x + 16 = (x - 8)(x - 2)$. Cosa ha sbagliato?

- A Ha confuso la fattorizzazione con la differenza di quadrati
 B Ha trovato due numeri con prodotto 16 ma somma sbagliata: $(-8) + (-2) = -10 \neq -8$
 C Ha dimenticato di estrarre il fattore comune prima di fattorizzare
 D Niente, la fattorizzazione è corretta

Risposta corretta: B — servono $a + b = -8$ e $a \cdot b = 16$, cioè $a = b = -4$. La fattorizzazione corretta è $(x - 4)^2$.

Esercizi: raccoglimento totale e parziale

Esercizio 1. Fattorizza le seguenti espressioni estraendo il *massimo fattore comune*: **[4 punti]**

a. [2 punti] **b.** [2 punti]

$$8a^3b - 12a^2b^2 + 4ab$$

$$6x^2y^2 - 9xy^3 + 3xy$$

.....

.....

Soluzione: MCD = $4ab$
 $[4ab(2a^2 - 3ab + 1)]$

Soluzione: MCD = $3xy$
 $[3xy(2xy - 3y^2 + 1)]$

Esercizio 2. Fattorizza per *raccoglimento parziale*: **[8 punti]**

a. [4 punti]

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12$$

.....

Soluzione: $x^2(x + 3) - 4(x + 3) = (x^2 - 4)(x + 3) = [(x - 2)(x + 2)(x + 3)]$

b. [4 punti]

$$3a^2b - 6ab + 2a^2 - 4a$$

.....

Soluzione: $3ab(a - 2) + 2a(a - 2) = [a(a - 2)(3b + 2)]$

Esercizi: prodotti notevoli inversi e trinomi

Esercizio 3. Fattorizza completamente il seguente polinomio: **[4 punti]**

$$x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2$$

.....

Soluzione: $x^2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = [x^2(x - 1)^3]$

Esercizio 4. Fattorizza i seguenti trinomi: **[10 punti]**

a. [5 punti] **b.** [5 punti]

$$x^2 - 8x + 15$$

$$2x^2 + 7x + 6$$

.....

$$a + b = -8,$$

Soluzione: $ab = 15$

$$a = -3,$$

$$b = -5$$

$$[(x - 3)(x - 5)]$$

$$a \cdot c = 12;$$

$$m + n = 7,$$

Soluzione: $mn = 12$

$$m = 3,$$

$$n = 4$$

$$[(2x + 3)(x + 2)]$$

Esercizio 5. Fattorizza *completamente* i seguenti polinomi:

[12 punti]

a.

[6 punti]

$$x^4 - 16$$

Soluzione: $x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$

$(x^2 - 4) = (x - 2)(x + 2)$; $(x^2 + 4)$ irriducibile su \mathbb{Z}

$$[(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)]$$

b.

[6 punti]

$$2x^3 + 2x^2 - 24x$$

$$a + b = 1, \quad a = 4,$$

Soluzione: $2x(x^2 + x - 12)$; $ab = -12 \rightarrow b = -3$

$$[2x(x + 4)(x - 3)]$$

Esercizio: divisione polinomiale

Esercizio 6. Esegui la seguente divisione polinomiale utilizzando il metodo di tua scelta: *divisione classica in colonna* oppure *regola di Ruffini*. Indica chiaramente quale metodo hai scelto. **[6 punti]**

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 3)$$

Metodo scelto: Divisione classica in colonna Regola di Ruffini

Soluzione — Divisione classica:

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 3)$$

$$\bullet x^3 : x = x^2; \quad x^2(x - 3) = x^3 - 3x^2; \quad \text{resto: } x^2 - 5x + 6$$

$$\bullet x^2 : x = x; \quad x(x - 3) = x^2 - 3x; \quad \text{resto: } -2x + 6$$

$$\bullet -2x : x = -2; \quad (-2)(x - 3) = -2x + 6; \quad \text{resto: } 0$$

$$Q(x) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2), \quad R = 0$$

Regola di Ruffini ($r = 3$):

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 3 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$Q(x) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$$

Fattorizzazione completa: $P(x) = (x - 3)(x - 1)(x + 2)$

Esercizio facoltativo:

[2 punti bonus]

Divisione polinomiale a resto zero

Esegui la divisione

$$(x^3 + 2x^2 - x - 2) : (x + 1)$$

utilizzando **entrambi** i metodi indicati di seguito. Verifica che il quoziente sia lo stesso.

Metodo classico (divisione in colonna):

.....

.....

Regola di Ruffini (con $r = -1$, poiché il divisore è $x - (-1)$):

.....

.....

Soluzione — Metodo classico:

$$(x^3 + 2x^2 - x - 2) : (x + 1)$$

- $x^3 : x = x^2$; $x^2(x + 1) = x^3 + x^2$; resto: $x^2 - x - 2$
- $x^2 : x = x$; $x(x + 1) = x^2 + x$; resto: $-2x - 2$
- $-2x : x = -2$; $(-2)(x + 1) = -2x - 2$; resto: 0

$$Q(x) = x^2 + x - 2, \quad R = 0$$

Regola di Ruffini ($r = -1$):

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$Q(x) = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

Fattorizzazione completa: $P(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 1)$