Piano Cartesiano e Retta — Sintesi

prof. Diego Fantinelli

1 Piano Cartesiano

Definizione

Il **piano cartesiano** è un sistema di riferimento bidimensionale costituito da due assi perpendicolari (ortogonali):

- **asse x** (ascissa): orizzontale
- **asse y** (ordinata): verticale

Ogni punto P del piano è univocamente identificato da una coppia ordinata di numeri reali (x, y) dette **coordinate**.

Proprietà fondamentali

- Le coordinate identificano univocamente ogni punto
- Le distanze e gli angoli possono essere calcolati usando formule algebriche
- Permette di rappresentare graficamente equazioni algebriche

Distanza tra due punti

La distanza tra i punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ è: d(A B) = sqrt((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)

Punto medio di un segmento

Il punto medio M del segmento AB ha coordinate: M = left((x_1 + x_2) / 2, (y_1 + y_2) / 2 right)

Esempio

Per $A(1, 2)$ e $B(5, 6)$:

- Distanza: $d(AB) = \sqrt{(5-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
- Punto medio: $M(3, 4)$

2 Equazioni della Retta

Definizione

Una retta nel piano cartesiano è il luogo geometrico di tutti i punti che soddisfano un'equazione lineare.

Forme principali dell'equazione

Una retta può essere rappresentata in diverse forme:

- **Forma esplicita:** $y = mx + q$
  dove m è il coefficiente angolare e q l'ordinata all'origine
- **Forma implicita:** $ax + by + c = 0$
  dove a, b, c sono numeri reali (con a e b non contemporaneamente nulli)
- **Forma segmentaria:** $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$
  dove p è l'intercetta con l'asse x e q con l'asse y
- **Forma parametrica:**

$$\begin{cases} x = x_0 + kl \\ y = y_0 + km \end{cases}$$

dove (x_0, y_0) è un punto sulla retta e (l, m) sono i parametri direttori

Rette particolari

- **Asse x:** $y = 0$
- **Asse y:** $x = 0$
- **Parallela all'asse x:** $y = h$ (pendenza $m = 0$)
- **Parallela all'asse y:** $x = h$ (pendenza «infinita»)
- **Bisettrice I e III quadrante:** $y = x$
- **Bisettrice II e IV quadrante:** $y = -x$

2.1 Significato geometrico del coefficiente angolare

Coefficiente angolare m

Il coefficiente angolare m di una retta $y = mx + q$ rappresenta:

- La **pendenza** della retta, cioè la sua inclinazione rispetto all'asse x
- Il valore di y quando ci si sposta di 1 unità a destra sull'asse x

Interpretazione grafica

- Se $m > 0$: la retta sale da sinistra a destra (angolo acuto con l'asse x)
- Se $m < 0$: la retta scende da sinistra a destra (angolo ottuso con l'asse x)
- Se $m = 0$: la retta è orizzontale (parallela all'asse x)
- Se m è indefinito: la retta è verticale (parallela all'asse y)

Ordinata all'origine q

Il numero q è l'ordinata del punto dove la retta interseca l'asse y. Cioè, quando $x = 0$, si ha $y = q$.

2.2 Equazione della retta per due punti

Formula

La retta passante per i punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ (con $x_1 \neq x_2$) ha equazione: (y - y_1) / (x - x_1) = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)

Oppure, in forma esplicita: y = m x + q quad «dove» quad m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)

Coefficiente angolare tra due punti

m = (Delta y) / (Delta x) = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)

Esempio

Per $A(1, 2)$ e $B(3, 6)$:

- $m = \frac{6-2}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$
- Equazione: $y - 2 = 2(x - 1) \to y = 2x$

2.3 Equazione della retta noto un punto e la pendenza

Formula del fascio di rette

La retta passante per il punto $P(x_0, y_0)$ con coefficiente angolare m ha equazione: y - y_0 = m(x - x_0)

Questa formula è nota come **equazione del fascio di rette** poiché al variare di m si ottengono tutte le rette passanti per P.

Esempio

Retta per $P(2, 3)$ con pendenza $m = -1$: y - 3 = −1(x - 2)
y = -x + 5

3 Parallelismo e Perpendicolarità

Teorema 1: Rette parallele

Due rette non parallele agli assi sono **parallele** se e solo se hanno il **medesimo coefficiente angolare**: r «parallel» s ↔ m_r = m_s

Teorema 2: Rette perpendicolari

Due rette non parallele agli assi sono **perpendicolari** se e solo se il prodotto dei loro coefficienti angolari è -1: r ⊥ s ↔ m_r · m_s = −1 quad «oppure» quad m_s = −1 / m_r

Interpretazione

Se una retta ha pendenza m, la retta perpendicolare ha pendenza $-\frac{1}{m}$ (antireciproca).

Esempio

- Parallela a $y = 2x + 1$ per il punto $(3, 5)$: $y - 5 = 2(x - 3) \to y = 2x - 1$
- Perpendicolare a $y = 2x + 1$ per il punto $(3, 5)$: $y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 3) \to y = -\frac{x}{2} + \frac{13}{2}$

3.1 Distanza di un punto da una retta

Formula con equazione implicita

La distanza del punto $P(x_0, y_0)$ dalla retta $r : ax + by + c = 0$ è: d(P, r) = |a x_0 + b y_0 + c| / sqrt(a^2 + b^2)

Formula con equazione esplicita

Se la retta ha equazione $y = mx + q$ (cioè $mx - y + q = 0$): d(P, r) = |y_0 - m x_0 - q| / sqrt(m^2 + 1)

Esempio

Distanza di $P(1, 2)$ dalla retta $2x + y - 3 = 0$: d = |2(1) + 1(2) - 3| / sqrt(2^2 + 1^2) = |2 + 2 - 3| / sqrt(5) = 1 / sqrt(5) = sqrt(5) / 5

3.2 Distanza tra due rette parallele

Procedimento

Per trovare la distanza tra due rette parallele r ed s:

1. Ricavare le coordinate di un punto qualsiasi sulla retta r
2. Applicare la formula della distanza punto-retta usando il punto trovato e l'equazione di s

Osservazione

Due rette parallele hanno la stessa distanza in ogni punto, quindi il risultato non dipende dal punto scelto.

Esempio

Distanza tra $r : 2x + y - 1 = 0$ e $s : 2x + y + 3 = 0$:

Punto su r: poniamo $x = 0 \to y = 1$, quindi $P(0, 1)$

Distanza: $d = |2(0) + 1 - 3\frac{|}{\sqrt{2^2+1^2}} = |-2\frac{|}{\sqrt{5}} = 2\frac{\sqrt{5}}{5}$

4 Intersezione di rette

Metodo: Sistema di equazioni

Per trovare il punto di intersezione di due rette non parallele, si risolve il sistema formato dalle loro equazioni: cases(a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, a_2 x + b_2 y + c_2 = 0)

La soluzione (x_0, y_0) rappresenta le coordinate del punto di intersezione.

Condizioni

- Se il sistema ha **una soluzione**: rette incidenti (si intersecano in un punto)
- Se il sistema ha **infinite soluzioni**: rette coincidenti (sono la stessa retta)
- Se il sistema ha **nessuna soluzione**: rette parallele (non si intersecano)

Esempio

Intersezione di $y = 2x + 1$ e $y = -x + 4$: 2x + 1 = -x + 4
3x = 3
x = 1, quad y = 3 Punto di intersezione: $P(1, 3)$

4.1 Appartenenza di un punto a una retta

Criterio

Un punto $P(x_0, y_0)$ appartiene a una retta r se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione della retta.

Procedimento

Per verificare se $P(x_0, y_0)$ appartiene a $r : ax + by + c = 0$:

1. Sostituire $x = x_0$ e $y = y_0$ nell'equazione
2. Se l'equazione è soddisfatta (risultato = 0), il punto appartiene alla retta
3. Se no, il punto non appartiene alla retta

Esempio

Il punto $P(2, 5)$ appartiene a $y = 2x + 1$?

Sostituiamo: $5 = 2(2) + 1 = 5$ [SI] appartiene.

Il punto $Q(1, 3)$ appartiene a $y = 2x + 1$?

Sostituiamo: $3 = 2(1) + 1 = 3$ [SI] appartiene.

5 Allineamento di tre punti

Definizione

Tre punti A, B, C sono **allineati** (o collineari) se appartengono alla stessa retta.

Metodi per verificare l'allineamento

Metodo 1: Verificare che i coefficienti angolari siano uguali m(A B) = m(B C) ↔ (y_B - y_A) / (x_B - x_A) = (y_C - y_B) / (x_C - x_B)

Metodo 2: Trovare l'equazione della retta per A e C e verificare che B le appartiene

Metodo 3: Verificare che l'area del triangolo ABC sia zero

Esempio

Sono allineati $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(3, 5)$?

$m_{AB} = \frac{3-1}{2-1} = 2$
$m_{BC} = \frac{5-3}{3-2} = 2$
Poiché $m_{AB} = m_{BC}$, i punti sono allineati.

6 Asse di un segmento

Definizione

L'**asse** (o asse di simmetria) di un segmento AB è la retta perpendicolare ad AB passante per il suo punto medio. È il luogo geometrico dei punti equidistanti da A e B.

Procedimento

Per trovare l'asse del segmento AB:

1. Calcolare il punto medio M: $M = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$
2. Calcolare il coefficiente angolare di AB: $m_{AB} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$
3. Calcolare il coefficiente angolare dell'asse (perpendicolare): $m_{\text{asse}} = -\frac{1}{m_{AB}}$
4. Scrivere l'equazione: $y - y_M = m_{\text{asse}}(x - x_M)$

Esempio

Asse del segmento $A(1, 1)$ e $B(5, 3)$:

- $M = (3, 2)$
- $m_{AB} = \frac{3-1}{5-1} = \frac{1}{2}$
- $m_{\text{asse}} = -2$
- Equazione: $y - 2 = -2(x - 3) \to y = -2x + 8$

6.1 Checklist di risoluzione

Procedura rapida

[ ] 1. Analizza il problema
- identifica i dati (punti, pendenza, ecc.)
- determina cosa devi trovare

[ ] 2. Scegli la forma appropriata
- due punti: usa l'equazione per due punti
- punto + pendenza: usa l'equazione del fascio
- parallelismo: stessa pendenza
- perpendicolarità: pendenza antireciprocal

[ ] 3. Applica le formule
- calcola i coefficienti
- semplifica l'equazione
- converti nella forma richiesta

[ ] 4. Verifica la soluzione
- controlla che i punti soddisfino l'equazione
- verifica le condizioni geometriche

7 Fasci di rette

Definizione

Un **fascio di rette** è un insieme di rette che hanno una proprietà geometrica in comune.

Tipi di fasci

Fascio proprio: insieme di tutte le rette passanti per un punto fisso detto **centro**. L'equazione è: y - y_0 = m(x - x_0) dove (x_0, y_0) è il centro e m varia al variare del parametro.

Fascio improprio: insieme di tutte le rette parallele a una retta data. L'equazione è: y = m x + q dove m è fisso e q varia al variare del parametro.

Esempio

Fascio proprio con centro $P(2, 3)$: y - 3 = m(x - 2)
y = mx - 2m + 3 Al variare di m, ottengo tutte le rette per P.

8 Esercizi di riepilogo

Esercizio 1

Trovare l'equazione della retta passante per $A(2,1)$ e $B(4,5)$.

Soluzione: $m = \frac{5-1}{4-2} = 2$ $y - 1 = 2(x-2) \to y = 2x - 3$

Esercizio 2

La retta $r : y = 3x - 2$ passa per il punto $P(1,1)$?

Soluzione: Sostituiamo: $1 = 3(1) - 2 = 1$ [SI] appartiene.

Esercizio 3

Trovare la retta parallela a $y = 2x + 1$ e passante per $Q(0,3)$.

Soluzione: Pendenza uguale: $m = 2$ $y - 3 = 2(x-0) \to y = 2x + 3$

Esercizio 4

Trovare il punto di intersezione di $r : y = x + 2$ e $s : y = -2x + 5$.

Soluzione: $x + 2 = -2x + 5$ $3x = 3 \to x = 1, y = 3$ Punto: $P(1,3)$